Universitá degli studi di Ferrara
Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Storia, insegnamento e divulgazione della matematica
a.a.2020/2021

Mancini Monica - *Matricola N.141751*

IL PASSAGGIO DAL CONO AL PIANO

LE SEZIONI CONICHE COME CURVE PIANE PER CLAUDE MYDORGE

La vita, gli interessi e le attività culturali di Claude Mydorge

La figura di Mydorge non ha ricevuto molta attenzione nella letteratura corrente, sebbene egli fosse stimato come un *savant* (sapiente) nella Parigi del XVII secolo, tanto che Descartes lo ritenne uno dei più grandi matematici del suo tempo. È proprio grazie all'alta considerazione che i suoi contemporanei avevano di lui che possiamo oggi avere notizie a suo riguardo.

Le fonti principali di informazione sulla vita e sull'attività scientifica di Mydorge sono la biografia di Adrien Baillet, il biografo di René Descartes, e la corrispondenza tra Mersenne, Descartes e Mydorge stesso. La biografia di Descartes è una fonte indispensabile di informazione su Mydorge per via della stretta relazione tra i due matematici dal 1625 in poi.
Di seguito l'elenco delle fonti attraverso le quali oggi conosciamo la figura di Mydorge:

- *La vie de Monsieur Descartes*, biografia di Descartes scritta da Baillet (1692);
- alcune lettere scambiate tra Mersenne, Descartes e Mydorge, che ne mettono in luce il ruolo culturale (a partire dal 1625);
- *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthods en géoméitrie*, opera di Michel Chasles, eminente matematico francese del XIX secolo, che commentò e analizzò il trattato di Mydorge sulle sezioni coniche (1837).

Più recentemente, nel 2009, Luigi Maierù ha tentato di ricostruire la biografia di Mydorge e dei suoi interessi culturali (nell'opera *Le sezioni coniche nel seicento*).

Claude Mydorge (1585-1647) nacque, visse e morì a Parigi in una delle più illustri e ricche famiglie di Francia. Studiò presso il Collegio dei Gesuiti di La Flèche e successivamente si formò come avvocato, prima di intraprendere una carriera legale e amministrativa. Dopo aver prestato servizio come *conseiller* (consigliere) alla corte del Grand Châtelet (palazzo di giustizia e sede della polizia), divenne tesoriere della Généralité di Amiens (generale delle finanze a guida del distretto finanziario della città di Amiens).

L'impiego scelto da Mydorge gli concesse tempo sufficiente per coniugare il lavoro previsto dal suo incarico pubblico con la vita di un *savant* (sapiente). La sua posizione lavorativa era ideale per due motivi: il primo é che era una posizione di grande rilevanza e solo una figura di alto rango, come Mydorge vista la sua famiglia, poteva occupare tale posizione; in secondo luogo, consisteva in compiti e mansioni leggere, il che significava poter dedicare molto tempo alla materia che più lo appassionava, la matematica, e ad altre discipline ad essa connesse, come l'astronomia e l'ottica.

Nel 1613 sposò Madame de la Haye, sorella di un ambasciatore francese di Costantinopoli. Sappiamo che ebbe un figlio, il quale riprese dei suoi manoscritti di ottica e li rielaborò in tre brevi trattati, dei quali però si è persa traccia (*De la lumiére*, *De l'ombre* e *De la sciotérique*, rispettivamente *Sulla luce*, *Sull'ombra* e *Sugli orologi solari*).

Mydorge risiedeva in ciò che restava dell'antico Palais des Tournelles.

Figura 1: Il *Grand Châtelet* di Parigi sotto Luigi XIV.

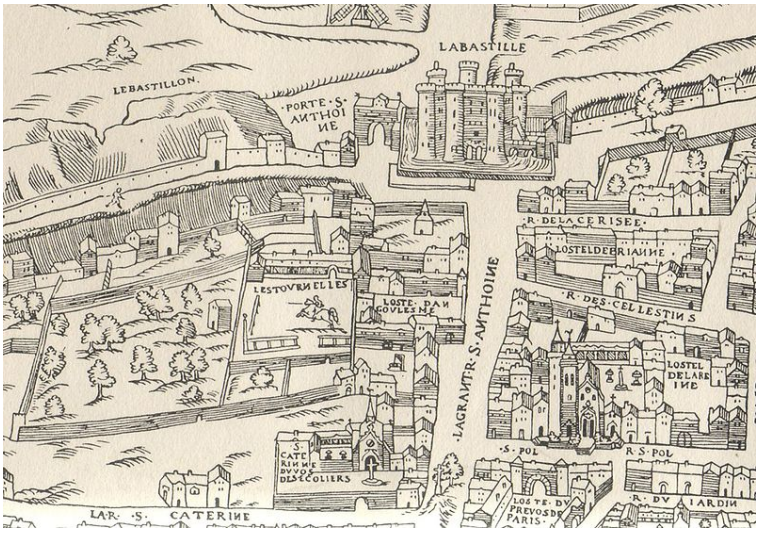


Figura 2: Il distretto attorno al *Palais des Tournelle* nel 1550.

Nel 1625 Mydorge incontrò R. Descartes (1596-1650) a Parigi. Si instaurò velocemente una solida relazione tra i due che durò per il resto della loro vita. Come attesta Baillet, Mydorge era considerato da Descartes un "amico prudente e fedele" ed era da lui ritenuto il "primo matematico di Francia del suo tempo".

Mydorge condivideva con Descartes un forte interesse per l'ottica e la natura della visione. È noto che per promuovere le indagini del suo amico su questi argomenti, Mydorge commissionò la produzione di innumerevoli lenti paraboliche, iperboliche, ovali ed ellittiche, spendendo negli anni oltre 100 000 *écus* (scudi, moneta francese) in strumenti ottici.

Entrambi gli scienziati erano particolarmente interessati alla rifrazione, e quando Descartes, indipendentemente da Snell, scoprì la legge della rifrazione, convinse Mydorge a far realizzare un vetro iperbolico per testare la sua scoperta. Mydorge era anche amico di Fermat e Mersenne, e nel 1638 svolse un ruolo importante nella risoluzione della controversia tra Descartes e Fermat che era sorta quando Fermat confutò la *Dioptrique* di Descartes: anche grazie alla buona mediazione di Mydorge, la disputa fu superata e Descartes e Fermat si riconciliarono (fine degli anni 30 del Seicento).

Oltre ad essere un eminente geometra ed un esperto di ottica, Mydorge possedeva una vivace curiosità ed era aperto alle nuove idee del tempo. Come Fermat, apparteneva al gruppo d'élite degli scienziati del XVII secolo che perseguivano la scienza come *amateurs* (dilettanti amanti della materia), ma allo stesso tempo i suoi contributi furono significativi in più di un campo della conoscenza.

Mydorge apparteneva al Circolo di Mersenne a Parigi, all'interno del quale godeva di grande stima: questo Circolo raccoglieva presso il Collegio dei Frati Minori le personalità più evolute culturalmente attorno alla figura di Padre Marin Mersenne. Qui convergevano i *savants* e gli *amateurs de science* del tempo: i primi, i "sapienti", erano coloro che erano ritenuti capaci di esprimere ed elaborare le proprie idee; i secondi, gli "amanti della scienza", erano coloro che erano in grado di capire e far proprie tali idee.
Sebbene fosse una figura ben conosciuta nella Parigi culturale e scientifica del 1625-1645, poche informazioni su Mydorge sono state trasmesse alle generazioni a lui successive.

La considerazione ed i meriti di Mydorge erano riconosciuti anche oltre i confini francesi: diversi studiosi si rivolsero anche a Mydorge per chiedere pareri sulla risoluzione di problemi.
La sua ottima reputazione tra i contemporanei era dovuta principalmente alla sua conoscenza e abilità nel risolvere problemi di ciclometria (geometria del cerchio), meteorologia, astronomia e ottica (in particolare la natura della visione, i sistemi diottrici, ovvero che concernono la rifrazione con lenti, ed i sistemi catottrici, ovvero concernenti la riflessione su specchi).

Lo studio dei sistemi ottici lo portò all'analisi approfondita delle sezioni coniche.

Di seguito sono riportate, in ordine cronologico, le opere scritte da Mydorge:

- *Usage de l'un et l'autre astrolabe particulier et universel*, (francese, Parigi, 1625); illustra come utilizzare l'astrolabio, strumento per l'osservazione astronomica e per la navigazione;
- *Examen du livre des récréations mathematiques* (francese, Parigi, 1630; ristampato nel 1643); contiene problemi ricreativi di matematica nell'ambito aritmetico, geometrico, astrologico, della prospettiva, della mineralogia, della metallurgia e sui fuochi d'artificio;
- *Prodromi catoptricorum et dioptricorum sive conicorum operis ad abdita radii reflexi et refracti mysteria praevij et facem praeferentis libri duo* (latino, Parigi, 1631), ampliato in *Prodromi... libri quattour* (latino, Parigi, 1639), inserito nell'opera di Mersenne *Universae geometriae* (Parigi, 1644); è l'opera di Mydorge che raccoglie conoscenza e metodi risolutivi per problemi sulle sezioni coniche;
- *Traité de géométrie*, manoscritto in francese non pubblicato, contiene più di 1000 problemi di geometria e la loro soluzione;
- é noto che Mydorge produsse altri manoscritti minori (almeno altri 3 brevi trattati) che vennero trasportati in Inghilterra dagli amici di famiglia William Cavendish, duca di Newcastle, e Thomas Wriothesley, conte di Southempton; questi scritti andarono perduti.

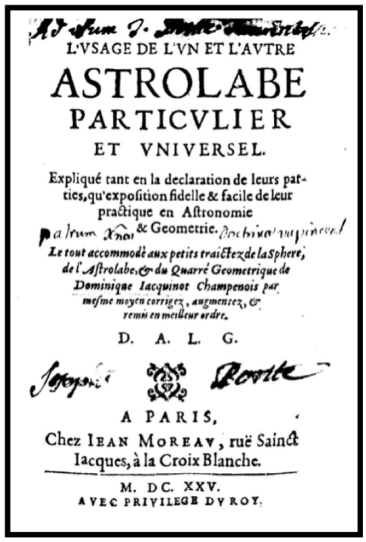

L'VSAGE DE L'VN ET L'AVTRE
ASTROLABE
PARTICVLIER
ET VNIVERSEL.
Expliqué tant en la declaration de leurs parties, qu'exposition fidelle & facile de leur practique en Astronomie & Geometrie.
Le tout accommodé aux petits traictez de la Sphere, de l'Astrolabe, & du Quarré Geometrique de Dominique Iacquinot Champenois par mesme moyen corrigez, augmentez, & remis en meilleur ordre.
D. A. L. G.
A PARIS,
Chez IEAN MOREAV, ruë Sainct Iacques, à la Croix Blanche.
M. DC. XXV.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

Figura 3: Prima opera (1625), *Usage de l'un et l'autre astrolabe particulier et universel.*

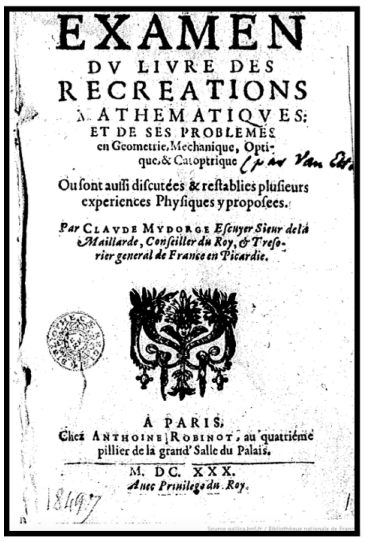

EXAMEN
DV LIVRE DES
RECREATIONS
MATHEMATIQVES:
ET DE SES PROBLEMES
en Geometrie, Mechanique, Optique, & Catoptrique
Ou sont aussi discutées & restablies plusieurs experiences Physiques y proposées.
Par CLAVDE MYDORGE Escuyer Sieur de la Maillarde, Conseiller du Roy, & Tresorier general de France en Picardie.
A PARIS,
Chez ANTHOINE ROBINOT, au quatriéme pillier de la grand' Salle du Palais.
M. DC. XXX.
Auec Priuilege du Roy.

Figura 4: Seconda opera (1630), *Examen du livre des récréations mathematiques.*

CLAVDII
MYDORGII
PATRICII PARISINI
PRODROMI
CATOPTRICORVM
ET DIOPTRICORVM
SIVE
CONICORVM
OPERIS AD ABDITA
RADII REFLEXI ET REFRACTI
mysteria prævij & facem præferentis.
LIBRI QVATVOR PRIORES.
D. A. L. G.
PARISIIS,
Ex Typographia I. DEDIN, via Nucum, sub insigni parui Scuti.
M. DC. XXXIX.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Figura 5: Terza opera (1639), *Prodromi catoptricorum et dioptricorum sive conicorum operis ad abdita radii reflexi et refracti mysteria praevij et facem praeferentis.*

Nel 1640, Sir Charles Cavendish (1594-1654) tentò di far trasferire Descartes e Mydorge in Inghilterra, ma quest'ultimo si oppose. Questo ostacolo non fermò lo zelo di Cavendish, ma il suo progetto di riunire grandi geni "per sperimentare la fisica" fu interrotto dalla guerra in Gran Bretagna.
Tra il 1640 e il 1647, anno della sua morte, la vita di Mydorge volse al termine, accompagnata da una "reputazione di grande integrità di vita".

L'opera *Prodromi catoptricorum et dioptricorum*

L'opera principale di Claude Mydorge sulle sezioni coniche è il trattato *Prodromi catoptricorum et dioptricorum sive Conicorum operis ad abdita radii reflexi et refracti mysteria praevij et facem*

praeferentis. Libri quatour priores. Questo lavoro, insieme ad alcuni altri scritti sulle coniche dei suoi contemporanei (Descartes, Fermat, Desargues e Pascal) era condiviso e letto soprattutto all'interno del Circolo fondato da Marin Marsenne, un teologo, filosofo e matematico francese che agì come veicolo per la circolazione di informazioni e scoperte scientifiche in un'epoca in cui i *journals* (riviste scientifiche) non esistevano ancora.

Sappiamo che questo trattato sulle coniche, indicato dai suoi successori con *Coniques*, è composto da due parti, ognuna composta a sua volta da quattro libri. La prima parte fu pubblicata nel 1639, metre la seconda parte rimase manoscritta fino alla sua morte, e conseguentemente se ne persero le tracce.

Il titolo propone questa raccolta di libri come un prerequisito essenziale per lo studio dei fenomeni di rifrazione e di riflessione. Nel progetto di Mydorge vi erano altri quattro libri (preparati dall'autore e perduti dopo la sua morte) nei quali avremmo potuto leggere come, usando le coniche, tali fenomeni fisici potessero essere affrontati.

Lo scopo dell'opera è duplice: documentare e raccogliere la "dottrina" sulle coniche e allo stesso tempo scrivere un trattato utile per chi voleva risolvere problemi di ottica, in particolare relativi a sistemi catottrici (costituiti unicamente da superfici riflettenti come gli specchi) e diottrici (costituiti unicamente da elementi rifrangenti come le lenti).
Il tentativo di Mydorge fu quello di dare al lettore una solida base di conoscenze essenziali sulle sezioni coniche, prima di affrontare i problemi legati ai fenomeni naturali. Sappiamo che per la stesura di questa prima parte teorica Mydorge consultò gli *Elementi conici* di Apollonio nell'edizione del 1566 di Commandino (questo nome, infatti, compare diverse volte nei libri III e IV del *Prodromi*). Ma a differenza di Apollonio, l'**obiettivo di Mydorge non è quello di presentare una teoria delle coniche pura e astratta, ma quello di insegnare a costruire le coniche perché necessarie per risolvere problemi, in particolare problemi di fisica**. E forse proprio davanti alle difficoltà poste da qualche specifico problema di costruzione di qualche specchio o lente Mydorge si rese conto che non è importante tanto il fatto che la conica che viene utilizzata sia sezione di qualche cono quanto il fatto di essere in grado di tracciare la conica su un foglio di carta, per poi tracciarla su un materiale più resistente ed infine considerare il solido di rotazione che da essa si può ottenere. Così facendo si potrà costruire uno specifico specchio o una particolare lente.

Michel Chasles, eminente matematico francese del XIX secolo, scrive di lui nell'opera *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*: «Mydorge non ha l'obiettivo principale, come Desargues e Pascal, di derivare le proprietà delle coniche da quelle del cerchio in prospettiva o dalla considerazione costante del cono da cui hanno origine. La sua opera è scritta nello stile degli Antichi; ma nondimeno, facendo più uso di loro della considerazione del cono, l'autore può includere in un'unica dimostrazione proposizioni che ne richiedevano tre di Apollonio; e porta così una grande semplificazione in questa materia».

La comparsa del trattato di Mydorge nel 1639 fu vista ed interpretata come una novità ed il suo lavoro venne considerato *moderno* per diversi motivi:

1. è scritto con un linguaggio semplice ed essenziale ed evita digressioni inutili e superflue;
2. presenta dimostrazioni semplici e dirette (senza ricorrere, ad esempio, alla "reductio ad absurdum");
3. raccoglie un gran numero di metodi per costruire nel piano le coniche per punti senza l'utilizzo di strumenti (le costruzioni organiche erano ampiamente utilizzate dai suoi contemporanei come Descartes, per esempio);
4. mostra come costruire coniche uguali e coniche simili (teoria presente in Apollonio e in Pappo).

L'importanza attribuita al lavoro di Mydorge dai suoi contemporanei sembra indicare chiaramente che i suoi contributi possono essere considerati molto più che opere divulgative.

Prodromi catoptricorum et dioptricorum può essere considerato uno dei primi momenti della geometria in cui l'attenzione sulle coniche è focalizzata sulla loro costruzione in quanto curve in un piano. Passando dal primo al secondo libro del suo trattato, viene sottolineato il fatto che **le proprietà delle coniche come sezioni di un cono sono le stesse quando vengono considerate come curve piane**, aprendo così la strada alla trattazione delle coniche all'interno della geometria analitica.

Veniamo ora alla struttura dell'opera.

Nell'introduzione al trattato un *Monitum*, un avvertimento per il lettore, un modo per rassicurarlo. Per questo motivo, Mydorge decise di:

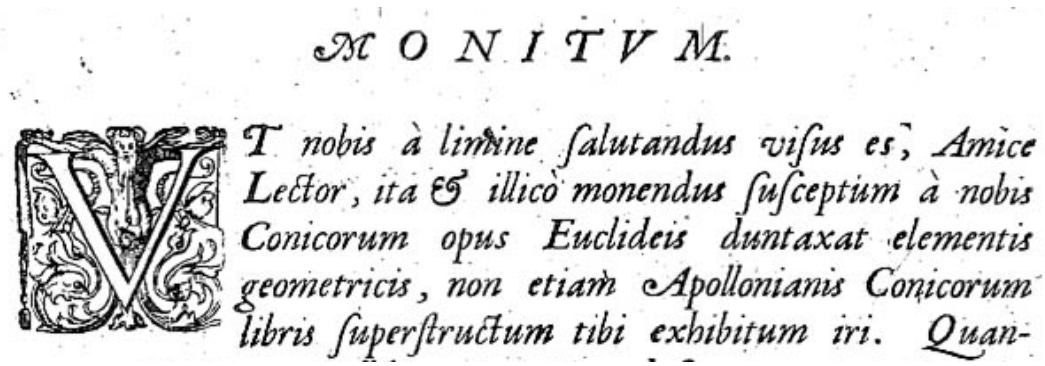
1. spiegare fin da subito lo scopo dell'opera e i pochi strumenti necessari per seguirlo nello studio delle coniche (come la "proporzione geometrica" utilizzata negli *Elementi* di Euclide);
2. presentare la struttura completa del *Prodromi catoptricorum et dioptricorum* illustrando il contenuto dei diversi libri;
3. chiedere la fiducia del lettore nel seguirlo passo passo; ad esempio, vi è l'invito a tralasciare ciò che inizialmente non è chiaro perché chiarezza verrà fatta via via che si studiano le proposizioni con le loro figure e dimostrazioni.

Di seguito la struttura del trattato così come presentata da Mydorge stesso all'interno del *Monitum* introduttivo. La struttura rispecchia il progetto iniziale del matematico (mai completato in quanto solo i primi quattro libri sono stati stampati e divulgati):

LIBRO I	definizioni ed elementi caratteristici delle coniche;
LIBRO II	costruzione geometrica per punti delle coniche sul piano;
LIBRO III	coniche "uguali" sulla superficie del cono e nel piano;
LIBRO IV	coniche "simili" sulla superficie del cono e nel piano;
LIBRO V	porzioni di sezioni coniche per lo studio dei fenomeni fisici;
LIBRO VI	problemi relativi all'impiego delle coniche negli esperimenti di fisica;
LIBRO VII	coniche inscritte e circoscritte e lo studio degli specchi;
LIBRO VIII	superfici coniche e materiali opachi e trasparenti.

Come detto sopra, gli ultimi quattro libri non raggiunsero le generazioni successive.

In conclusione, l'obiettivo di Mydorge era quello di creare un'edizione di un trattato sulle coniche, avendo il testo di Apollonio come punto di riferimento, che fosse alla portata degli amanti di ottica, i quali avrebbero utilizzato l'opera come un manuale operativo ma anche arricchente per i lettori che desiderassero raggiungere una conoscenza approfondita sull'argomento.



MONITVM.

VT nobis à limine ſalutandus viſus es, Amice Lector, ita & illicò monendus ſuſceptum à nobis Conicorum opus Euclideis duntaxat elementis geometricis, non etiam Apollonianis Conicorum libris ſuperſtructum tibi exhibitum iri. Quan-

Figura 6: Il *Monitum* dell'introduzione del *Prodromi*.

Il contesto dei primi 60 anni del XVII secolo

È sicuramente utile conoscere quel fosse lo "stato dell'arte" sulle coniche nel periodo immediatamente precedente e contemporaneo alla pubblicazione del trattato di Mydorge.

Alla fine del XVI secolo possono essere individuate tre linee attraverso le quali le conoscenze sulle coniche venivano tramandate:

1. la prima è rappresentata dalla trasmissione degli *Elementi conici* di Apollonio nell'Occidente;
2. la seconda è la presenza di trattati sugli specchi ustori e sulla prospettiva;
3. la terza riguarda l'applicazione delle sezioni coniche nella determinazione delle linee d'ombra delle meridiane (o orologi solari).

Questo acceso interesse verso una maggiore comprensione ed applicazione delle sezioni coniche della fine del XVI secolo è indispensabile per capire perché e in che modo diversi matematici si orientarono allo studio delle coniche nei primi 60 anni del secolo successivo.

In questi anni, infatti, furono pubblicati diversi trattati inerenti le coniche: ricordiamo, fra tanti, *Lo specchio ustorio* di Bonaventura Cavalieri (1632), l'opera di René Descartes *Géométrie* (1637) che per la prima volta identifica le coniche tramite equazioni specifiche e ancora il *Traité* (1639) di Gerard Desargues nel quale le coniche sono applicate per risolvere problemi di prospettiva nella pittura.

l'opera di René Descartes Géométrie (1637) che per la prima volta identifica le coniche tramite equazioni specifiche e ancora il Traité (1639) di Gerard Desargues nel quale le coniche sono applicate per risolvere problemi di prospettiva nella pittura.
Successivamente alla pubblicazione dei volumi di Mydorge, la produzione di manuali che trattano le coniche e le loro possibili applicazioni per risolvere problemi di vario tipo proseguì: nel 1644 padre Marin Mersenne pubblicò *Universae géométrie* a Parigi, opera all'interno della quale sono raccolti scritti sulle coniche di autori antichi e recenti (tra i quali Mydorge stesso) volti allo studio dei fenomeni di rifrazione; nel 1655 John Wallis diede alle stampe il suo *De sectionibus conicis* nel quale mostrò l'importante risultato del passaggio dalle coniche come curve nel piano alle coniche come sezioni di un cono.

Questo breve excursus sugli scritti dei primi sessant'anni del XVII secolo denota come **gli *Elementi conici* di Apollonio, pur rimanendo un sicuro punto di riferimento culturale, non era più sufficiente per rispondere alle esigenze dei matematici del tempo**. Vi era l'esigenza di studiare queste curve per risolvere problemi di fisica, astronomia ed altri campi della scienza.

A cominciare dai primi decenni del 1600 le coniche erano viste come luoghi di punti, ovvero curve nel piano e non più come sezioni di un cono. Mydorge ricoprì un ruolo fondamentale in questo passaggio concettuale nella storia delle coniche. Questo può essere considerato uno dei primi momenti in cui l'attenzione sulle coniche viene centrata sulla loro costruzione come curve piane.

Nel passaggio dal primo libro del suo trattato, in cui le coniche sono presentate come sezioni del cono, al secondo libro in cui dà una descrizione piana delle coniche, Mydorge mise in evidenza che le proprietà di cui godono le sezioni coniche e quelle di cui godono le rispettive curve nel piano sono le stesse. Nel momento in cui esplicitò il passaggio dallo spazio al piano Mydorge generalizzò i risultati classici. Le proprietà delle coniche come curve in un piano sono le stesse delle coniche come sezioni di un cono.
Esplicitato questo, si possono considerare le coniche unicamente come curve piane, che è ciò che Mydorge fece dal secondo libro in poi.

Nuove costruzioni per le coniche nel piano

Ciò che viene presentato di seguito sono le proposizioni in cui Mydorge costruisce le coniche, premettendo alcune nozioni e proposizioni preliminari.
Come anticipato da Mydorge stesso nel suo *Monitum*, le proporzioni tra i vari elementi geometrici delle costruzioni sono ampiamente utilizzate in ogni proposizione.

Libro I, Proposizione 7
In ogni parabola, se da due punti della sezione si tracciano due ordinate, i loro quadrati sono in un rapporto uguale a quello dei rispettivi segmenti che staccano sull'asse a cominciare dal vertice. $AH^2 : BK^2 = FH : FK$

In questa proposizione del primo libro viene dimostrata una proprietà della parabola come sezione di un cono che poi verrà utilizzata anche come proprietà della parabola come curva piana.
Scambiando i medi nella proporzione, si ottiene $AH^2 : FH = BK^2 : FK$.
Ognuno di questi due rapporti è uguale ad una costante, che nei termini moderni della geometria analitica possiamo scrivere come $1/a$.

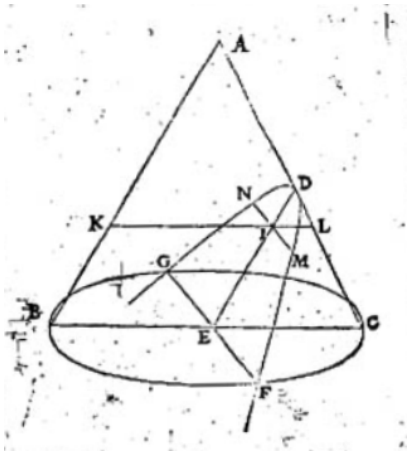


Figura 7a: Proposizione I.7, figura di Mydorge.

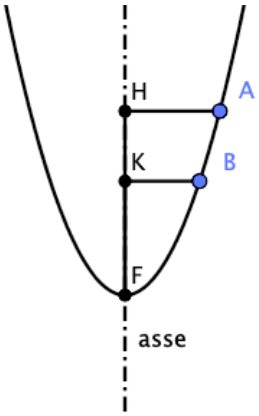


Figura 7b: Costruzione con GeoGebra.

Libro I, Proposizione 47
Se la retta tangente alla parabola in un punto interseca il prolungamento dell'asse, la distanza di questo punto dal fuoco è uguale alla distanza del fuoco dal punto di intersezione. $BA = AC$

Nel trattato, scritto in latino, ogni fuoco viene chiamato *umbelicus* mentre la proiezione di un punto della conica sull'asse della conica è detta la *applicata*.

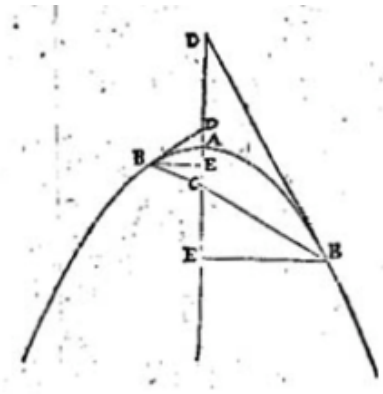


Figura 8a: Proposizione I.47, figura di Mydorge.

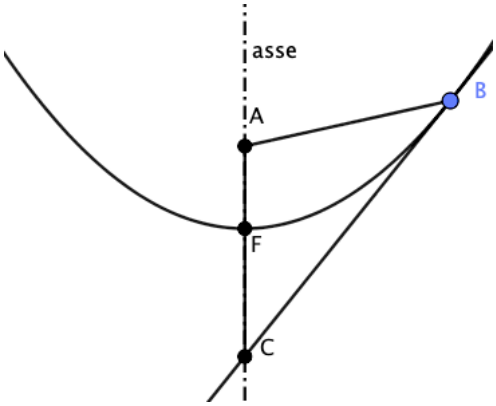
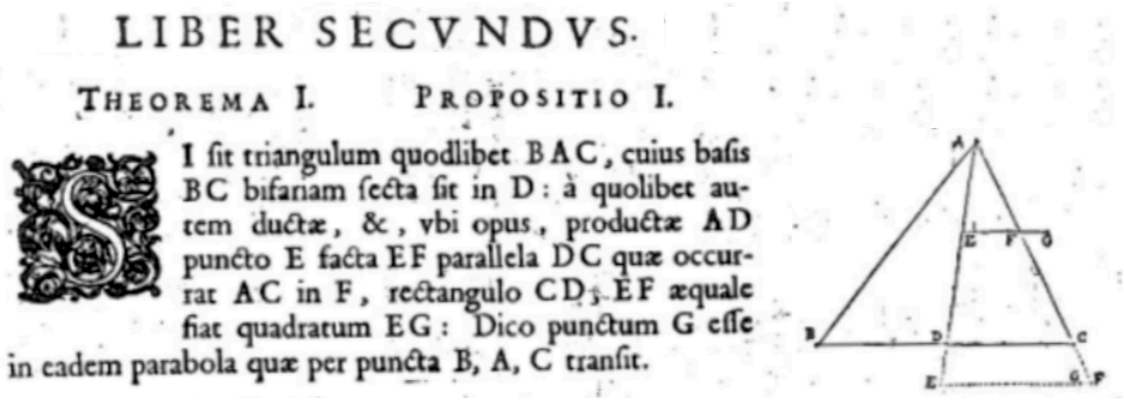


Figura 8b: Costruzione con GeoGebra.

Libro II, Proposizione 1
Sia dato un qualunque triangolo ABC, rettangolo in B; si divida AC in due parti uguali nel punto D e si costruisca $DE \perp AC$; da C si conduca CE, parallela ad AB, che interseca DE nel punto E. SI divida AB in parti uguali nel punto F. Allora E si trova su una parabola di vertice F e fuoco A.

Nella dimostrazione viene introdotto il termine *parametro*, che Mydorge utilizzò per la prima volta per indicare il *lato retto*.



LIBER SECVNDVS.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI ſit triangulum quodlibet BAC, cuius baſis BC bifariam ſecta ſit in D: à quolibet autem ductæ, &, vbi opus, productæ AD puncto E facta EF parallela DC quæ occurrat AC in F, rectangulo CD, EF æquale fiat quadratum EG: Dico punctum G eſſe in eadem parabola quæ per puncta B, A, C tranſit.

Figura 9a: Proposizione II.1 con figura, così come presentata da Mydorge nel suo trattato.

Dimostrazione

Sappiamo che $\widehat{ABC} = 90°$, $AD = DC$, $DE \perp AC$, $CE \parallel AB$ e $AF = FB$.
Sia G il punto di intersezione tra DE e AB.
Tracciamo $FH \parallel BC$. FH passa per il punto D (infatti le parallele FH e BC dividono AB e AC in parti uguali: $AF : BH = AD : DC$.
Gli angoli in F e in H sono retti.
I triangoli FDA e HDC sono congruenti (per la proposizione I.26 degli *Elementi* di Euclide, ovvero il II Criterio di Congruenza dei triangoli), quindi $FD = DH$.
I triangoli FGD e HDE sono congruenti (per la proposizione I.26 degli *Elementi* di Euclide), quindi $HE = FG$.
Tracciamo $IE \parallel BC$; allora $HE = IF = FG$.
Nel triangolo ADG, rettangolo in D (perché $DE \perp AC$), abbiamo $FD^2 = AF \cdot FG$, cioè $FD^2 = AF \cdot IF$. Allora $4FD^2 = 4AF \cdot IF$ e quindi $(2FD)^2 = IF \cdot 4AF$.

Essendo $2FD = FH = IE$, otteniamo $IE^2 = IF \cdot 4AF$. Se A è il fuoco di una parabola ed

F il suo vertice, allora dalla definizione classica di parabola abbiamo $IE^2 = IF \cdot$ *parametro*, dove IE è l'applicata della sezione al diametro o all'asse, IF è la distanza del punto d'applicazione dell'ordinata dal vertice, $4AF$ è il lato retto della sezione (che Mydorge chiama *parametro*).
Dunque il punto F si trova sulla parabola di vertice F e fuoco A. ■

Libro II, Problema 1 - Costruzione della parabola per punti
Dati per posizione il fuoco ed il vertice di una parabola, descrivere nello stesso piano la parabola per punti.

Trovato un certo numero di punti ripetendo a piacere il protocollo di costruzione, rimane il problema di come unire tali punti per ottenere la conica. Mydorge scrisse **«aeliquabili manu ducta»** nel proprio trattato, ovvero congiungere i punti «con mano ferma e che compie un'azione continua».

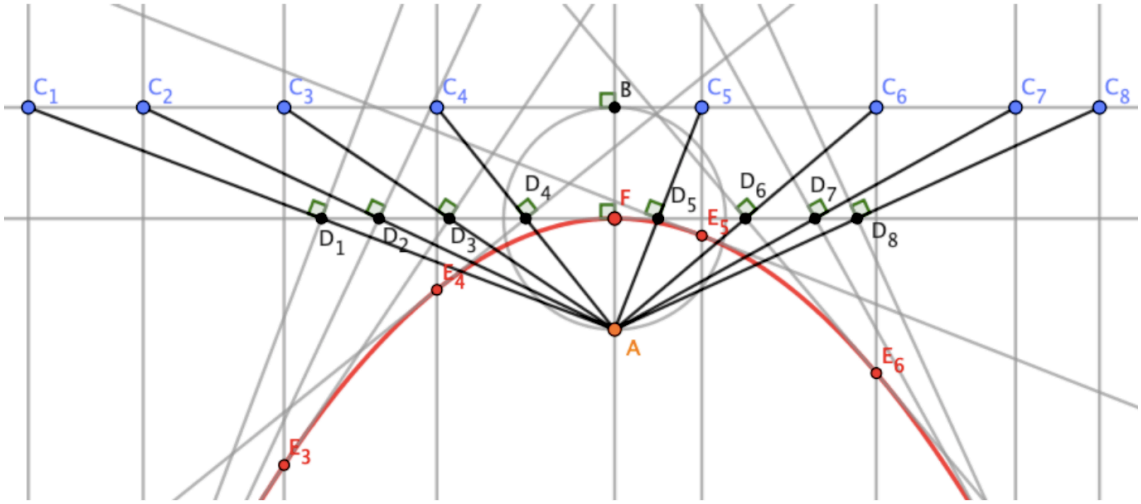


Figura 10: Costruzione della parabola per punti con GeoGebra.

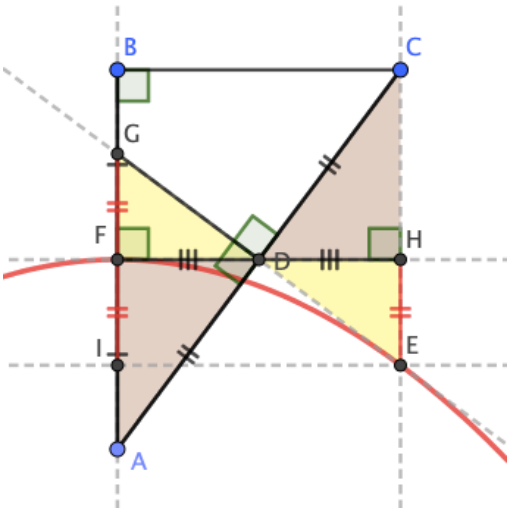


Figura 9b: Costruzione con GeoGebra.

Protocollo di costruzione

Siano A il fuoco e F il vertice di una parabola.
Tracciamo AF e prolunghiamola fino al punto B in modo che sia $AF = FB$.
Dal punto F tracciamo FD perpendicolare ad AB e prolunghiamola quanto vogliamo.
Dal punto B tracciamo BC perpendicolare ad AB e prolunghiamola quanto vogliamo.
Scegliamo su BC quanti punti vogliamo C_i.
Uniamo ogni C_i con A.
Ogni retta AC_i interseca FD nei punti D_i.
Dai punti C_i tracciamo le parallele ad AB.
Dai punti D_i tracciamo le perpendicolari alle rette AC_i. Tali perpendicolari intersecano le parallele ad AB, tracciate dai punti C_i, nei punti E_i.
Per la prima proposizione preliminare, i punti E_i si trovano su una stessa parabola di vertice F e fuoco A. Se questi punti sono congiunti con una curva «aequabili manu ducta», questa curva è una parabola.

Proseguiamo ora con lo studio delle altre sezioni coniche, sempre introducendo preliminarmente alcune proposizioni utili alle costruzione per punti di tali sezioni.

Osserviamo che alcune proposizioni considerate da Mydorge come proprietà delle coniche sono oggi corrispondenti alle definizioni di tali sezioni come luoghi dei punti.

Libro I, Proposizione 8
In ogni ellisse o iperbole o circonferenza, se da due punti della sezione di tracciano due ordinate all'asse, i loro quadrati sono in un rapporto uguale a quello dei prodotti dei segmenti che le ordinate staccano sull'asse trasverso. $PH^2 : QK^2 = (AH \cdot HB) : (AK \cdot KB)$

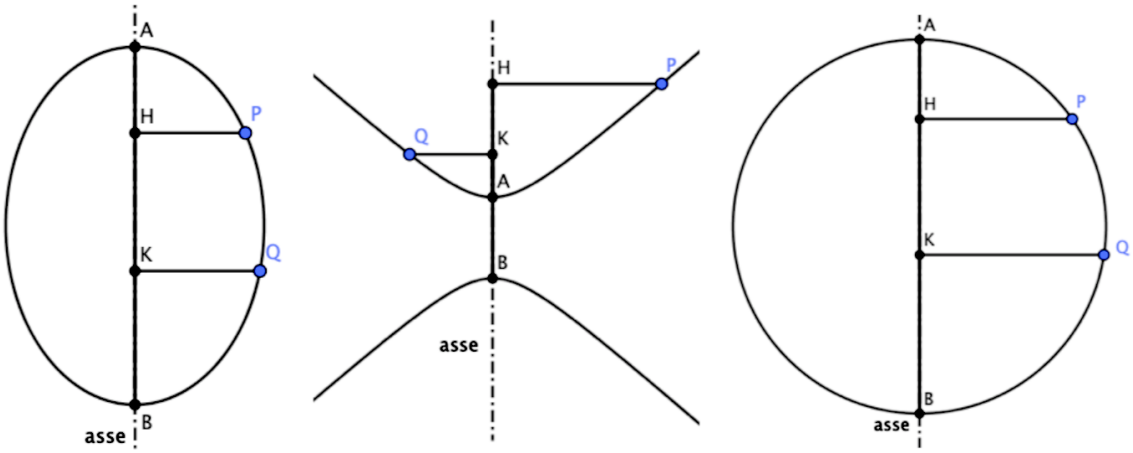


Figura 11: Costruzione con GeoGebra per la verifica della proprietà (proposizione I.8) per le tre coniche.

Libro I, Proposizione 51 - Corrispondente alla definizione moderna di ellisse
Se in un'ellisse da ambedue i fuochi si tracciano due rette ad uno stesso punto, la loro somma sarà uguale all'asse trasverso. $PK + PH = AB$

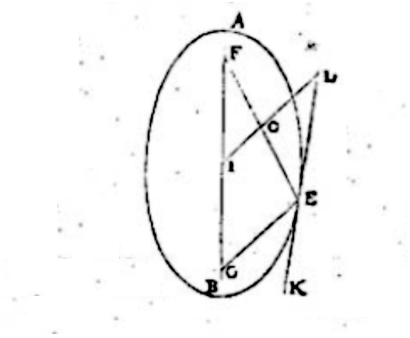


Figura 12c: Proposizione I.51, figura di Mydorge.

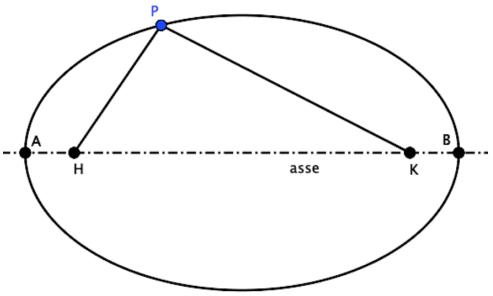


Figura 12d: Costruzione con GeoGebra.

Libro I, Proposizione 51 - Corrispondente alla definizione moderna di iperbole
Se in un'iperbole da ambedue i fuochi si tracciano due rette ad uno stesso punto, la maggiore supererà la minore di una quantità uguale all'asse trasverso. $PK - PH = AB$

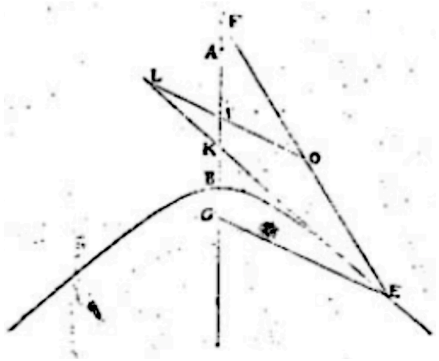


Figura 12a: Proposizione I.51, figura di Mydorge.

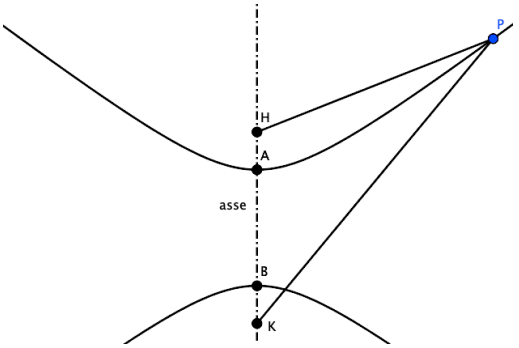


Figura 12b: Costruzione con GeoGebra.

Libro II, Proposizione 2
Sia dato un triangolo ABC non rettangolo in C. Costruita BG=BC, AG si divida in due parti uguali in H; si divida anche AC in due parti uguali in E; da E si tracci la perpendicolare EF ad AC, che interseca BC in F. Allora F si trova sull'iperbole o sull'ellisse di fuochi A e B e di vertice H.

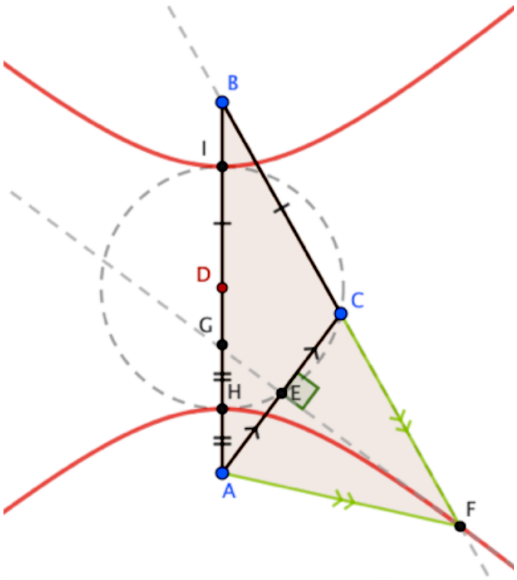


Figura 13a: Costruzione con GeoGebra (l'angolo $\widehat{BCA}$ è ottuso).

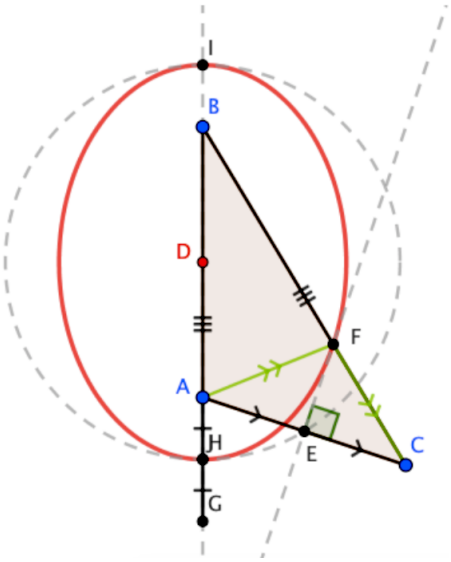


Figura 13b: Costruzione con GeoGebra (l'angolo $\widehat{BCA}$ è acuto).

Dimostrazioni

Per costruzione abbiamo che $BG = BC$, $AH = HG$, $AE = EC$.
Sia D il punto medio di AB.
Facendo riferimento rispettivamente alla Figura 13a e alla Figura 13b, decudiacmo che:

$$DH = AD - AH = \frac{AB - AG}{2} = \frac{BG}{2}$$

$$DH = AD + AH = \frac{AB + AG}{2} = \frac{BG}{2}$$

Se prendiamo $HI = 2DH$, otteniamo: $HI = 2DH = BG = BC$.
Nel triangolo ACF abbiamo $AF = FC$, perché $EF \perp AC$ e $AE = EC$.

Se $\widehat{BCA}$ è ottuso, allora:
$BF > AF$, $BF - AF = BC = HI$.

Se $\widehat{BCA}$ è acuto, allora:
$BF + FC = BC = HI$.

Considerati l'asse traverso HI, i fuochi A e B e il vertice H, il punto F sta sulla sezione: per la proposizione I.51, nel primo caso F si trova su una iperbole, nel secondo caso F si trova su una ellisse. ■

Libro II, Problema 2 - Costruzione dell'iperbole per punti
Dati per posizione i fuochi ed uno dei vertici di un'iperbole, descrivere nello stesso piano l'iperbole per punti.

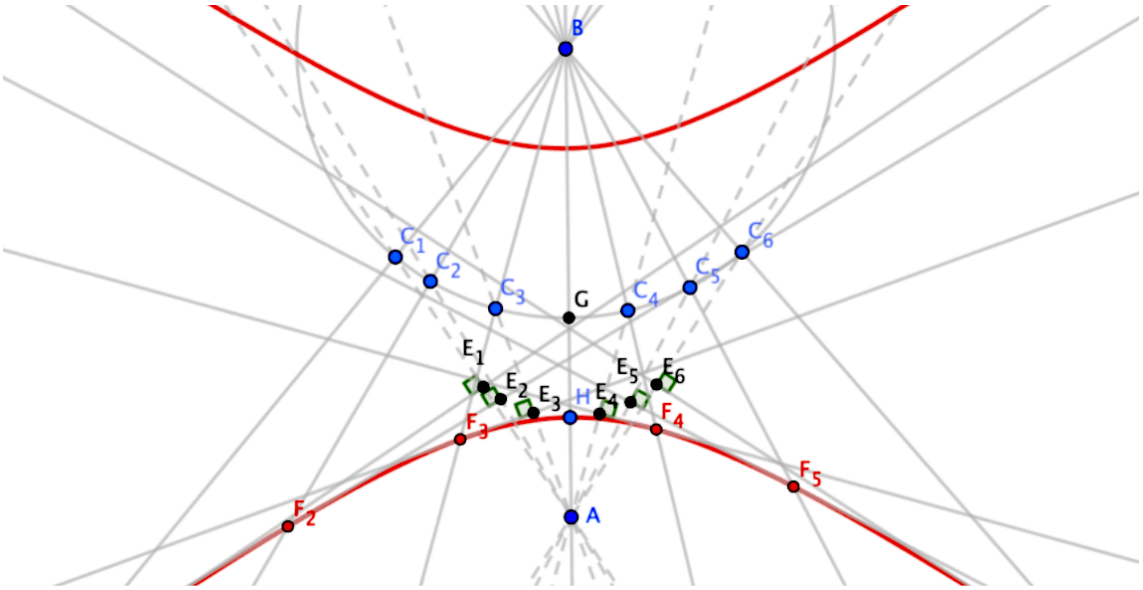


Figura 14: Costruzione dell'iperbole per punti con GeoGebra.

Protocollo di costruzione

Siano A, B i fuochi e H uno dei vertici di una iperbole.
AB passa per AH.
Prendiamo $HG = AH$.
Tracciamo un arco di circonferenza di centro B e raggio BG.
Dal punto B tracciamo un certo numero di rette che intersecano l'arco di cerchio nei punti C_i.
Dal punto A tracciamo le rette AC_i e, tra esse, consideriamo solo quelle che nei triangoli ABC_i formano l'angolo C_i ottuso.
Siano E_i i punti medi di AC_i.
Dai punti E_i tracciamo le perpendicolari alle rette AC_i. Ognuna di queste perpendicolari interseca la corrispondente BC_i nel punto F_i.
Poiché in ogni triangolo ABC_i l'angolo C_i è ottuso, per la proposizione preliminare II.2 i punti F_i si trovano su una stessa iperbole di fuochi A e B e di vertice H.

Libro II, Problema 3 - Costruzione dell'ellisse per punti
Dati per posizione i fuochi ed uno dei vertici di di un'ellisse, descrivere nello stesso piano l'ellisse per punti.

Protocollo di costruzione

Siano A, B i fuochi e H uno dei vertici di una ellisse.
H si trova sul prolungamento di AB. Su tale prolungamento prendiamo $HG = AH$.
Tracciamo un arco di circonferenza di centro B e raggio BG.
Su tale circonferenza scegliamo un certo numero di punti C_i.
Tracciamo le rette BC_i.
Tracciamo le rette AC_i e, tra esse, consideriamo solo quelle che nei triangoli ABC_i formano l'angolo C_i acuto.
Siano E_i i punti medi di AC_i.
Dai punti E_i tracciamo le rette E_iF_i perpendicolari alle AC_i: i punti F_i sono i punti di intersezione tra le rette E_iF_i e le corrispondenti BC_i.
Per la proposizione preliminare II.2 i punti F_i si trovano su una stessa ellisse di fuochi A e B e di vertice H.

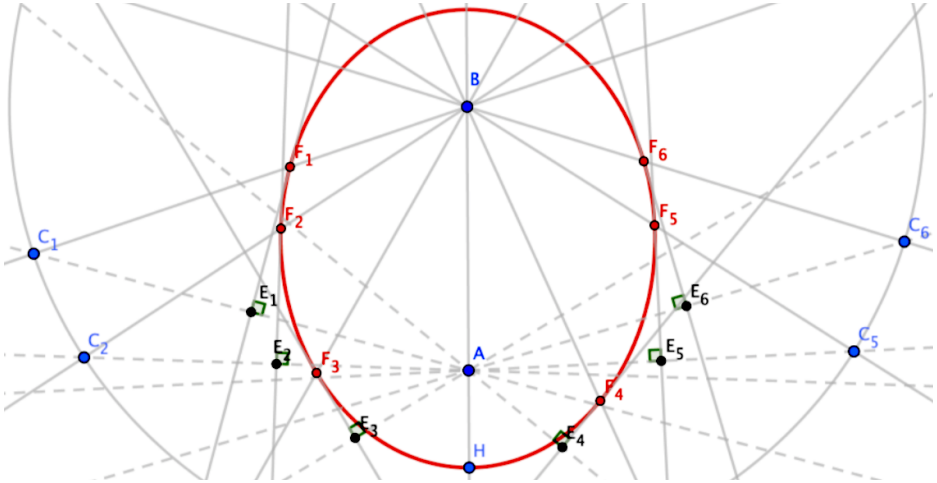


Figura 15: Costruzione dell'ellisse per punti con GeoGebra.

Un altro originale contributo: il Teorema delle corde

Mydorge va anche ricordato per aver riacceso l'interesse verso il cosiddetto *Teorema delle corde*. Nel 1637, all'interno del quarto libro del *Prodromi catoptricurum et dioptricorum*, Mydorge dimostrò il teorema delle corde e lo utilizzò per disegnare per punti la sezione conica passante per cinque punti dati sullo stesso piano.

Per dimostrare il Teorema delle corde, enunciato nella proposizione 27 del quarto libro, in modo semplice, Mydorge utilizzò una proposizione preliminare, riportata di seguito.

Libro IV, Proposizione 26
Siano AC e BD due corde di una sezione conica che si intersecano nel punto E, e siano BK e CK due rette parallele rispettivamente ad AC e BD, tangenti alla sezione conica nei punti B e C. Allora $BK^2 : CK^2 = AEC : BED$.

Secondo la notazione di Mydorge $AEC = AE \cdot EC$ e $BED = BE \cdot ED$.

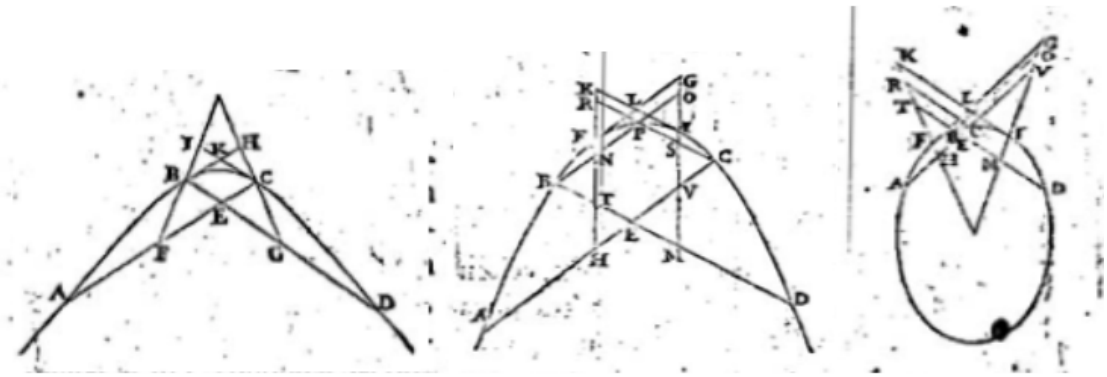


Figura 16: Proposizione IV.26, figure di Mydorge.

Risulta ora molto semplice dimostrare il Teorema delle corde.

Libro IV, Proposizione 27 - Teorema delle corde
Se in una sezione conica, o in una circonferenza, si disegnano due rette parallele che intersecano un'altra retta secante la conica, i rettangoli costruiti con i segmenti delle corde parallele stanno tra loro come i rettangoli costruiti con i segmenti ottenuti sulla terza corda secante.
$AHC : DIE = FHG : FIG$

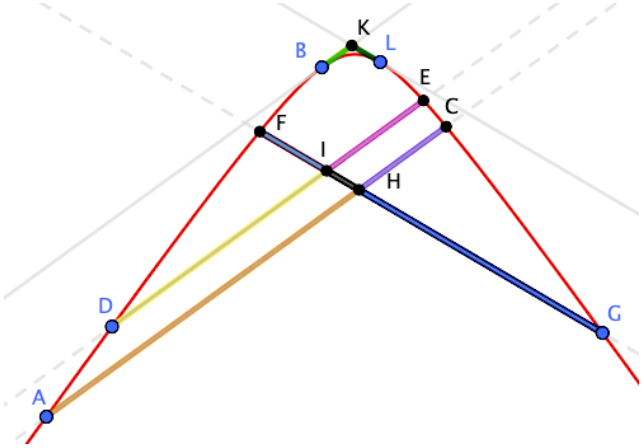


Figura 17: Costruzione con GeoGebra.

Dimostrazione

Si considerino due corde parallele AC e DE, che intersecano una terza corda FG nei punti H e I rispettivamente.
Per la proposizione preliminare IV.26 possiamo affermare, nella notazione di Mydorge, che:
$AHC : DIE = FHG : FIG$.

Consideriamo poi le due rette BK e LK tangenti alla sezione conica, la prima parallela ad AC (e DE), e l'altra parallela a FG. Queste tangenti si incontrano in K e toccano la sezione conica rispettivamente nei punti B ed L.

Successivamente, avendo chiamato I e H i punti di intersezione tra le due corde parallele AC e DE e la corda FG, per la proposizione IV.26 abbiamo che:
$BK^2 : LK^2 = AHC : FHG$ e $BK^2 : LK^2 = DIE : FIG$.

Da cui segue immediatamente il Teorema delle corde: $AHC : DIE = FHG : FIG$. ■

In modo simile ad Apollonio, anche Mydorge presentò questo risultato molto avanti nella sua opera (libro IV): questo perché fece ampio utilizzo di proprietà delle coniche presentate nei libri precedenti.

Ma diversamente da Apollonio, Mydorge utilizzò il teorema delle corde per risolvere problemi inerenti le coniche, in particolare il problema posto da Pappo (e da lui risolto solo parzialmente) del **determinare una sezione conica dati cinque punti**. Mydorge ottenne l'importante risultato di riuscire a risolvere il problema per tutte le sezioni coniche.

Di seguito la proposizione 34 del libro IV che illustra come tracciare per punti la sezione conica passante per cinque punti dati nel piano.

Libro IV, Proposizione 34 - Conica per cinque punti
Dati cinque punti su uno stesso piano, disegnare per punti la sezione conica passante per essi.

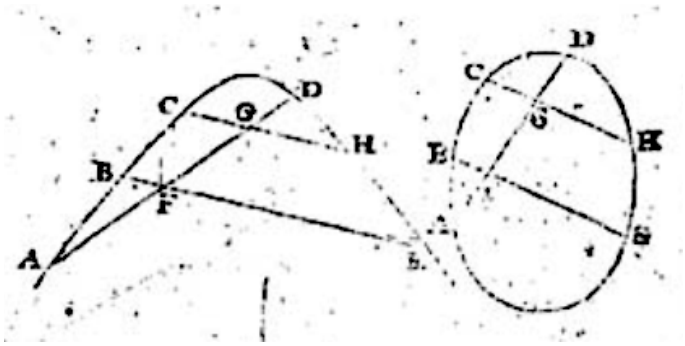


Figura 18a: Proposizione IV.34, figure di Mydorge.

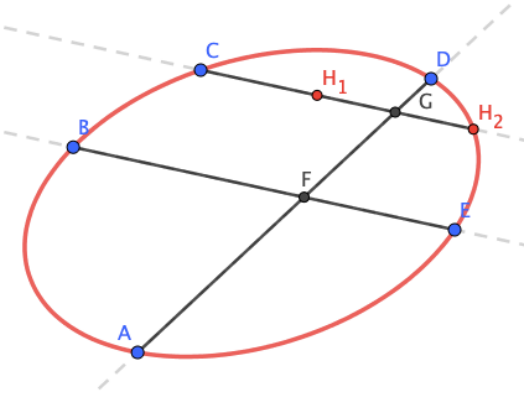


Figura 18b: Costruzione di una conica per cinque punti con GeoGebra.

Protocollo di costruzione

Dati cinque punti A, B, C, D, E unire A con D e B con E.
Chiamiamo F il punto di intersezione delle due rette AD e BE.
Tracciare la retta CG parallela a BE, estendendola in modo tale che il punto H che giace su di essa sia tale che $CGH : AGD = BFE : AFD$.
Per il Teorema delle corde possiamo affermare che H appartiene alla sezione conica passante per A, B, C, D, E (al tempo era già noto che per cinque punti passa una e una sola sezione conica).

L'approccio sintetico alle coniche fino al XVIII secolo

La necessità di risolvere problemi e l'avvento dell'analisi fecero sì che sempre meno attenzione fu rivolta alla geometria sintetica già a partire dal XVIII secolo. Anche lo studio delle sezioni coniche, che aveva trovato nuovo spazio tra i matematici e gli studiosi del 1600, cedette pian piano il posto alle nuove questioni sulle quali era prioritario concentrarsi dati gli sviluppi della scienza (e non solo) del tempo.

Il nostro percorso sulle coniche prosegue, dopo Claude Mydorge, con altre figure come Philippe de La Hire (1640-1718), che utilizzò la proposizione 26 del quarto libro del Prodromi... per dimostrare anch'egli il teorema delle corde, Isaac Newton (1642-1726), che riprese l'approccio sintetico per dimostrare numerosi teoremi sulle coniche e che si dedicò anche alle costruzioni organiche, e Ruggero Giuseppe Boscovich (1711-1787), che riconobbe nel teorema delle corde il teorema fondamentale con cui costruire tutta la teoria delle sezioni coniche.

Con Boscovich giungiamo al XVIII secolo e chiudiamo questo percorso di storia della matematica sull'approccio sintetico allo studio delle sezioni coniche.

Bibliografia

- Florio E., *Claude Mydorge Reader and Interpreter of Apollonius' Conics*, Mathematics, 2021, https://doi.org/10.3390/math9030261
- Maierú L., *Percorsi storico-didattici di matematica*, Cosenza Pellegrini Editore, 2013
- F. Amodeo, *I trattati delle sezioni coniche da Apollonio a Simson*, Giannini & Figli Editore, 1906
- Del Centina A., Fiocca A., *The chords theorem recalled to life at the turn of the eighteenth century*, Historia Mathematica
- Baillet A., *La vie de Monsieur Descartes*, rist. G. O. Verlag: Hildesheim, Germany, 1972
- Maierù L., *Le Sezioni Coniche nel Seicento*, Rubbettino Editore, 2009

Sitografia

- The Cambridge Descartes Lexicon: https://doi.org/10.1017/CBO9780511894695.182
- SophiaΣRareBooks: https://www.sophiararebooks.com/advSearchResults.php?action=search&orderBy=relevance&category_id=0&keywordsField=prodromi
- MacTutor: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mydorge
- Wikipédia (Français): https://fr.wikipedia.org/wiki/Claude_Mydorge
- Encyclopedia.com: https://www.encyclopedia.com/science/mydorge-claude
- Wikipedia (Italiano): https://it.wikipedia.org/wiki/Marin_Mersenne

Video

- Florio E., *Alcune riflessioni sulle coniche (laboratorio)*, Mathesis Ferrara, 2020: https://www.youtube.com/watch?v=Qn-Jb5b4ttg